SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. BOVE

CARATTERISTICHE E BI-CARATTERISTICHE

27 NOVEMBRE 1986

Scopo di questo seminario è di elencare qualche risultato sulla geo metria delle bicaratteristiche per operatori iperbolici a caratteristiche doppie. Per una tale classe di operatori i risultati di buona posizione del problema di Cauchy e di propagazione delle singolarità vengono ricavati utilizzando stime a priori che sono molto sensibili alla geometria dell'operatore; è quindi interes sante sapere se, "a livello di curve bicaratteristiche", vi è interazione tra la parte "semplice" della varietà caratteristica e quella "doppia".

Nel seguito considereremo un simbolo omogeneo di grado due nelle variabili (x,ξ) $T^* R^n \backslash 0$, $x = (x_0,x')$, $x' = (x_1,\ldots,x_n)$, del tipo

$$p(x,\xi) = -\xi_0^2 + a_1(x,\xi')\xi_0 + a_2(x,\xi'), \tag{1}$$

definito per $(x,\xi) \in T^*\Omega$, Ω aperto di R^{n+1}, iperbolico rispetto a ξ_0, ossia

$$4a_2(x,\xi') + a_1^2(x,\xi') \geqq 0. \tag{2}$$

Porremo $\Sigma_1 = \{p=0 , dp \neq 0\}$, $\Sigma_2 = \{p=0 , dp=0\}$, $H_p = \frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}$. Le curve bicaratteristiche sono le curve integrali di H_p: $\dot{\gamma}(t) = H_p(\gamma(t))$, $t \to \gamma(t) \in T^*\Omega$.

E' quindi ovvio che i problemi sorgono dai punti stazionari del campo vettoriale H_p, ossia dai punti di Σ_2. In tali punti è definito in modo in variante $dH_p(\rho)$, $\rho \in \Sigma_2$, la cui matrice viene chiamata matrice fondamentale o hamiltoniana e denotata con $F_p(\rho)$.

L'analisi di $F_p(\rho)$, $\rho \in \Sigma_2$, dà luogo a una sorta di classificazione che ha conseguenze anche a livello di buona posizione del problema di Cauchy e di propagazione delle singolarità. Vale il teorema

Teorema 1.[3]. Esistono al più due autovalori reali di F_p (in un punto $\rho \in \Sigma_2$), $\pm \lambda$, $\lambda > 0$, e si ha $sp(F_p(\rho)) \subset i R \cup \{+\lambda,-\lambda\}$. Inoltre esiste una trasformazione simplettica di $T_\rho T^*\Omega$ che muta la forma quadratica

$\sigma(z,F_p(\rho)z)$, z $T_\rho T^*\Omega$ in una delle seguenti forme quadratiche

a) $$\sum_{j=1}^{k} \mu_j(y_j^2 + \eta_j^2) + \sum_{j=k+1}^{k+\ell} \eta_j^2 + y_{n+1}^2 - 2\eta_n \eta_{n+1} \quad (k+\ell<n),$$

b) $$\sum_{j=1}^{k} \mu_j(y_j^2 + \eta_j^2) + \sum_{j=k+1}^{k+\ell} \eta_j^2 - \eta_{n+1}^2 \quad (k+\ell<n+1)$$

c) $$\sum_{j=1}^{k} \mu_j(y_j^2 + \eta_j^2) + \sum_{j=k+1}^{k+\ell} \eta_j^2 + 2\lambda \; y_{n+1} \eta_{n+1} \quad (k+\ell<n+1)$$

ove $\mu_j>0$, $j=1,\dots,k$, $\lambda>0$. I casi a), b), c) si escludono a vicenda [3].

In seguito supporremo anche che Σ_2 sia una varietà C^∞ di $T^*\Omega$.

Vale il seguente risultato:

Teorema 2. [4]. Supponiamo che p si possa scrivere nel modo seguente:

(3) $$p(x,\xi) = -\Lambda(x,\xi)M(x,\xi) + q(x,\xi),$$

ove

$\Lambda(x,\xi) = \xi_0-\lambda(x,\xi')$, $M(x,\xi) = \xi_0-\mu(x,\xi')$, $\lambda,\mu \in S^1_{cl}$, $q \geq 0$, $q \in S^2_{cl}$, per cui

(4) $$\{\Lambda,q\} \lesssim \sqrt{q}$$

(5) $$|\{\Lambda,M\}| \lesssim q + |\Lambda-M|.$$

Indichiamo con Γ un aperto conico della forma $\Gamma = \{(x,\xi) \in T^*\Omega |\; (x_0,x',\xi') \in I\times\Gamma'$, $\xi_0 \in R\}$. Allora

1) Se $\gamma \subset \Gamma$ è una curva integrale di H_Λ e $\gamma \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$ allora $\gamma \subset \Sigma_2$

2) Se $\rho_0 \in \Gamma\cap\Sigma_1$, γ_{ρ_0} è la curva integrale di H_p per ρ_0, $\forall V \subset\subset \Gamma$, $V \ni \rho_0$, si ha

$\mathrm{dist}(\gamma_{\rho_0} \cap V , \Sigma_2) > 0.$

Il teorema precedente è implicato da ipotesi geometriche:

Teorema 3. [4]. Supponiamo che, con le notazioni di sopra,

TE) $\rho \in \Sigma_2 \Rightarrow \dim \ker F_p(\rho) = \dim \Sigma_2$

RI) $\mathrm{codim}\ \Sigma_2 = \mathrm{cost.}$

R2) $\sigma|_{T\Sigma_2}$ ha rango costante

SPL) $\rho \in \Sigma_2 \Rightarrow \ker F^2_\rho(\phi) \cap \mathrm{Im}\ F^2_p(\rho) = \{0\}$

Allora p si può scrivere nella forma (3) con (4) e (5) verificate.

Teorema 4. [5]. Sia $\rho \in \Sigma_2$ un punto in cui vale la forma c) del teorema 1. Allora l'insieme delle curve integrali di H_p passanti per ρ è composto da due curve C^∞ che si incrociano trasversalmente in ρ.

Se $V_\pm$ sono gli autovettori associati a $\pm \lambda \in \mathrm{sp}(F_p(\rho))$ si ha che $V_\pm$ sono tangenti in ρ alle due curve bicaratteristiche.

I teoremi 3 e 4 sono dunque esempi di due casi opposti: nel primo non vi sono bicaratteristiche che hanno punti limitati su Σ_2, nel secondo vi sono solo due bicaratteristiche che tagliano Σ_2 in modo trasverso con direzione nota.

La situazione è meno precisa quando l'operatore è riconducibile alla forma a) del teorema 1. Si ha

Proposizione 5. ([2]). Valgono TE), RI), R2) del teorema 3. Inoltre

II) $\rho \in \Sigma_2 \Rightarrow \ker F^2_p(\rho) \cap \mathrm{Im}\ F^2_p(\rho) \neq \{0\}$.

Allora esiste una funzione $S(x,\xi)$ definita su un aperto Γ di $T^*\Omega$, $\Gamma \supset \Sigma_2$, tale che $0 \neq H_s(\rho) \in \ker F^2_p(\rho) \cap \mathrm{Im}\ F^2_p(\rho)$, e una funzione $\Lambda(x,\xi)$ definita su Γ, per cui $H_\Lambda(\rho) = -F_p(\rho)\ H_s(\rho)$, $\rho \in \Sigma_2$ e tali che p si può scrivere nella for-

ma (3) con (4) e (5) verificate se e solo se

(6) $$\sigma(H_{\{s,\Lambda\}}(\rho) \quad , \quad F_p(\rho)\, H_{\{s,\Lambda\}}(\rho)) = 0 \quad , \quad \rho \in \Sigma_2 .$$

Osservazione. Non è difficile rendersi conto che la (6) è una condizione sul 3-jet di p vicino a Σ_2.

Più precisamente si ha che (v. [2]) (6) equivale a:

(6') i) $(H_s^3 p)(\rho) = 0$

ii) $(H_\phi H_s^2 p)(\rho) = 0 \quad \forall H_\phi \in \mathrm{Im} F_p^2(\rho)/(\mathrm{Im} F_p^2(\rho) \cap \ker F_p^2(\rho))$;

$\forall \rho \in \Sigma_2$

Nelle ipotesi della proposizione 5 si possono fare esempi in cui (6) non vale e quindi non vale il Teorema 2, nei quali esistono curve integrali di H_p che hanno punti limite su Σ_2. L'esempio riportato di seguito è dovuto a T. Nishitani.

Proposizione 6. [6]. Siano q_i, i=0,...,p-1, r_i , i=1,...,p reali e positivi. Allora esiste una scelta di p numeri reali ε_i,i=1,...,p tali che, posto

$$p(x,\xi) = -\xi_0^2 + \sum_{i=0}^{p-1} q_i (x_i - x_{i+1})^2 \xi_n^2 + \sum_{i=1}^{p} r_i \xi_i^2 + \xi_n^{-1} \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i \xi_i \xi_p^2 ,$$

si ha:

i) p soddisfa le ipotesi TE), RI), R2) e II) della proposizione 5.

ii) Esiste una curva bicaratteristica contenuta in Σ_1 che ha un punto limite in Σ_2.

Osservazione. E' ovvio che un tale p non verifica la (6).

Un risultato generale è stato provato da T. Nishitani quando codim Σ_2=3.

Proposizione 7.[6]. Supponiamo che p verifichi TE), R1), R2), II) e che codim $\Sigma_2=3$. Allora condizione necessaria e sufficiente affinché non vi siano curve integrali di H_p contenute in Σ_1 con punti limite su Σ_2 è che valga la condizione (6).

La situazione in generale è un po' più complicata; in codimensione arbitraria di Σ_2 vale il risultato:

Proposizione 8.[1]. Supponiamo che p verifichi TE), R1), R2) e II. Supponiamo inoltre che $(H_s^3 p)(\rho) \neq 0$; $\rho \in \Sigma_2$. Allora esiste una bicaratteristica nulla di p che ha un punto limite su Σ_2.

Tenendo conto della Proposizione 5 la Proposizione 8 si può anche riformulare:

Proposizione 8'.[1]. Supponiamo che p verifichi TE), R1), R2) e II e che valga la (6') ii). Allora sono equivalenti le affermazioni:

i) p ammette una fattorizzazione del tipo (3)-(5);
ii) non esistono bicaratteristiche nulle di p con punti limite su Σ_2;
iii) vale (6') i).

Il comportamento delle bicaratteristiche "eccezionali" si può precisare:

Proposizione 8.[1]. Sia p come nella Proposizione 8. Sia $[0,+\infty[\ \ni s \longrightarrow \gamma(s)$ una bicaratteristica nulla di p tale che $\lim_{t \to +\infty} \gamma(t) = \bar{\rho} \in \Sigma_2$. Supponiamo che esista il $\lim_{t\to+\infty} \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = v \in T_{\bar{\rho}}(T^* R^{n+1})$. Allora $v = \frac{H_\Lambda(\bar{\rho})}{|H_\Lambda(\bar{\rho})|}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BERNARDI, A. BOVE, Geometric results for a class of hyperbolic operators with double characteristics, in corso di stampa su Comm. P.D.E.

[2] E. BERNARDI, A. BOVE, C. PARENTI, in preparazione.

[3] L. HÖRMANDER, The analysis of linear partial differential operators III, Berlin, 1985.

[4] V. Ja IVRII, WF of solutions of certain hyperbolic pseudodifferential equations, Trans. Moscow Math. Soc. 39 (1981), 87-119.

[5] N. IWASAKI, The Cauchy problem for effectively hyperbolic equations (Remarks), Preprint R.I.M.S., 1984.

[6] T. NISHITANI, Note on some non effectively hyperbolic operators, Science Reports, 32 (1983), 9-17.